# Über die Summabilität der Fourierschen Reihe.

Von GÉZA GRÜNWALD in Budapest.

Herrn Prof. Dr. Leopold Fejér im 40. Jahre seiner wissenschaftlichen Tätigkeit.

**1.** Es sei $f(\xi)$ eine $L$-integrierbare und nach $2\pi$ periodische Funktion der reellen Variabeln $\xi$ und es sei $\{s_n\}$ die Folge der Partialsummen ihrer Fourierschen Reihe an einer Stelle $\xi=x$, wo die Funktion stetig ist. Dann ist nach dem klassischen Fejérschen Satze[1])

$$(1)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_0+s_1+\ldots+s_n}{n+1}=f(x)$$

und nach HARDY und LITTLEWOOD[2])

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{s_0^2+s_1^2+\ldots+s_n^2}{n+1}=f^2(x).$$

Vor kurzem hat FEJÉR gefunden[3]), daß auch (2) ein gewöhnlicher Summabilitätssatz ist, nämlich ein Spezialfall des folgenden Summabilitätssatzes, der sich allerdings auf die Fourriersche Reihe einer Funktion zweier Variabeln bezieht:

*Es sei $F(\xi, \eta)$ eine $L$-integrierbare und nach $2\pi$ periodische Funktion der reellen Variabeln $\xi$ und $\eta$. Bezeichnet dann $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}$ die Fouriersche Doppelreihe dieser Funktion an einer Stelle $\xi=x$, $\eta=y$, wo die Funktion stetig ist, so ist die einfach unendliche Folge*

1) L. FEJÉR, Sur les fonctions bornées et intégrables, *Comptes rendus, Paris*, **131** (1900), S. 984—987.

2) G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, *Comptes rendus, Paris*, **156** (1913), S. 1307—1309.

3) L. FEJÉR, Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **34** (1938), S. 503—509.

$\{s_{nn}\}$ *der Hauptpartialsummen der Reihe* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}$ *(C, 3)-limitierbar zu F(x, y) als Grenzwert; d. h. es ist*

$$\text{(3)}\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n+2}{2}s_{00}+\binom{n+1}{2}s_{11}+\ldots+\binom{2}{2}s_{nn}}{\binom{n+3}{3}} = F(x, y),$$

*wo*

$$s_{nn}=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} A_{\nu\mu} \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Wir haben neuerdings bewiesen[4]), daß man in dem obigen Satze $(C, 1)$-Summabilität statt $(C, 3)$-Summabilität schreiben kann.

Im Falle $F(\xi, \eta)=f(\xi)f(\eta)$ ergibt sich (2), wegen $s_{nn}=s_n^2$. Unser Satz gilt auch für beliebige höhere Dimensionen, also bleibt (2) auch dann gültig, wenn wir im Exponenten statt 2 ein beliebiges $k>0$ setzen, d. h. es ergibt sich der Carleman—Suttonsche Satz[5]).

Wir betonen, daß *die obige* Fejérsche Summationsmethode, durch die *einfach* unendliche Folge der Hauptpartialsummen, von derjenigen wesentlich *verschieden* ist, die bei der Fourierschen Doppelreihe *gewöhnlich* angewendet wird[6]). Ein großer Vorteil dieser Methode ist neben ihrer Einfachheit, daß sie einen tieferen Einblick in die Theorie der starken Summabilität der Fourierschen Reihe einer Variabeln gewährt, als dies bisher möglich war.

Wir beweisen in dieser Arbeit den folgenden allgemeinen Summabilitätssatz:

S a t z A. *Es sei* $F(\xi, \eta)$ *eine L-integrierbare und nach* $2\pi$ *periodische Funktion der reellen Variabeln* $\xi$ *und* $\eta$. *Bezeichnet dann* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}$ *die Fouriersche Doppelreihe dieser Funktion* $F(\xi, \eta)$ *an der Stelle* $(\xi, \eta)$, *so ist die einfach unendliche Folge* $\{s_{nn}\}$ *der Hauptpartialsummen der Doppelreihe* $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}$ *fast überall* $(C, 1)$*-limitierbar zu* $F(\xi, \eta)$ *als Grenzwert; d. h. es ist fast überall*

---

4) G. Grünwald, Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen Doppelreihe, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **35** (1939), S. 343—350.

5) Siehe z. B. A. Zygmund, *Trigonometrical Series* (Warsaw, 1935), S. 238.

6) Diesbezüglich siehe L. Fejér [3]), insb. S. 504, Fußnote.

*im Quadrat* $-\pi \leqq \xi \leqq \pi$, $-\pi \leqq \eta \leqq \pi$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_{00}+s_{11}+\ldots+s_{nn}}{n+1} = F(\xi, \eta), \tag{4}$$

*wo*

$$s_{nn} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} A_{\nu\mu} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Auch dieser Satz bleibt im Falle mehrerer Variabeln gültig und der Beweis verläuft analog wie für Satz A; deshalb verzichten wir hier auf eine nähere Ausführung.

Als Korollar des Satzes A ergibt sich der folgende allgemeine starke Summabilitätssatz für gewöhnliche Fouriersche Reihen:

Satz B. *Es seien* $f(\xi)$ *und* $g(\eta)$ *L-integrierbare und nach* $2\pi$ *periodische Funktionen der reellen Variabeln* $\xi$ *bzw.* $\eta$. *Dann ist für fast alle* $(\xi, \eta)$ *im Quadrat* $-\pi \leqq \xi \leqq \pi$, $-\pi \leqq \eta \leqq \pi$

$$\lim_{n=\infty} \frac{s_0[f(\xi)]s_0[g(\eta)]+s_1[f(\xi)]s_1[g(\eta)]+\ldots+s_n[f(\xi)]s_n[g(\eta)]}{n+1} = \tag{5}$$
$$= f(\xi)g(\eta),$$

*wo* $s_\nu[f(\xi)]$, $s_\nu[g(\eta)]$ *die Partialsummen der Fourierschen Reihen der Funktionen* $f(\xi)$ *bzw.* $g(\eta)$ *an den Stellen* $\xi$ *bzw.* $\eta$ *bezeichnen.*

Es ist naheliegend zu fragen, ob man im Spezialfall $F(\xi, \eta) = f(\xi) f(\eta)$ bzw. $F(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p) = f(\xi_1) f(\xi_2) \ldots f(\xi_p)$ die mehrdimensionale Ausnahmenullmenge des Satzes A auf eine eindimensionale Nullmenge reduzieren kann und so der Hardy—Littlewoodsche bzw. Carleman—Suttonsche Satz aus der einzigen Bedingung folgt, daß $f(\xi)$ $L$-integrierbar ist[7]). Wir hoffen auf diesen Gegenstand zurückkehren zu können.

**2.** Die folgende Verschärfung des Vitalischen Überdeckungsatzes stammt von J. Marcinkiewicz und A. Zygmund[8]):

Lemma 1. *Es sei* $\alpha > 0$ *eine feste Zahl und E eine Punktmenge in der Ebene, für welche* $0 < mE < \infty$ *ist. Es sei jedem*

---

7) Den Hardy—Littlewoodschen Satz hat unter dieser allgemeinen Voraussetzung J. Marcinkiewicz bewiesen: Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *Journal London Math. Soc.*, 14 (1939), S. 162—168. Auch bei ihm bildet den Ausgangpunkt die wichtige Formel von Fejér (S. 163, Formel 2. 4 bei Marcinkiewicz), welche die fraglichen Mittel in Form eines *Doppelintegrales mit nichtnegativem Kern* darstellt.

8) J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, On the Summability of double Fourier series, *Fundamenta Math.*, 32 (1939), S. 122—132, insb. Lemma 1.

*Punkt $P$ von $E$ ein Rechteck $R(P)$ zugeordnet, dessen Seiten von der Länge $\delta(P)$ bzw. $\alpha\delta(P)$ achsenparallel sind und dessen Zentrum in $P$ liegt. Dann gibt es endlichviele einander nicht überdeckende Rechtecke so, daß*[9])

$$\sum_{\nu=0}^{n} mR(P_\nu) > cmE.$$

Aus diesem Lemma folgt[10])

Lemma 2. *Es sei $F(\xi, \eta)$ im Quadrat $Q'$: $-2\pi \leqq \xi, \eta \leqq 2\pi$ integrierbar und es sei $\alpha > 0$ eine feste Zahl. Man setze für einen beliebigen Punkt $(\xi, \eta)$ im Quadrat $Q$: $-\pi \leqq \xi, \eta \leqq \pi$*

$$F_\alpha^*(\xi, \eta) = \operatorname*{Max}_h \frac{1}{4\alpha h^2} \int_{-\alpha h}^{\alpha h} dt \int_{-h}^{h} |F(\xi + u, \eta + t)|\, du, \tag{6}$$

*wo $h$ so klein ist, daß das Integrationsgebiet in $Q'$ liege. Ferner sei*

$$F^*(\xi, \eta) = \operatorname*{Max}_s \{F_{2^s}^*(\xi, \eta) 2^{-|s|/2}\} \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

*Dann ist*

$$mE\{F^*(\xi, \eta) > \omega\} < \frac{c}{\omega} \iint_{(Q')} |F(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

*wo, wie üblich, $E\{F^*(\xi, \eta) > \omega\}$ die Menge der Punkte $(\xi, \eta)$ bezeichnet, für welche $F^*(\xi, \eta) > \omega$.*

Auf dieselbe Art wie Lemma 1 bzw. der Vitalische Überdeckungsatz, läßt sich beweisen

Lemma 3. *Es sei $\alpha > 0$ eine feste Zahl und $E$ eine Punktmenge in der Ebene, für welche $0 < mE < \infty$ ist. Jedem Punkte $P$ von $E$ sei ein Parallelogramm $R(P)$ mit dem Zentrum in $P$ und mit den Seitenlängen $\delta(P)$ bzw. $\alpha\delta(P)$ so zugeordnet, daß die eine Seite von $R$ parallel zur $y$-Achse und der Winkel zwischen der anderen Seite und der $x$-Achse $45^0$ ist. Dann gibt es endlichviele einander nicht überdeckende Parallelogramme so, daß*

$$\sum_{\nu=0}^{n} mR(P_\nu) > cmE.$$

Aus diesem Lemma folgt (so, wie Lemma 2 aus Lemma 1, vgl.[10]))

[9]) $c$ ist eine absolute Konstante (unabhängig auch von $\alpha$). Im Folgenden bezeichnen wir einfachheitshalber die verschiedenen absoluten Konstanten mit $c$, also ohne Indizes.

[10]) Siehe [8]), Lemma 2 und Lemma 3.

Lemma 4. *Es sei $F(\xi, \eta)$ im Quadrat $Q'': -3\pi \leqq \xi,\ \eta \leqq 3\pi$ L-integrierbar und es sei $\alpha > 0$ eine feste Zahl. Man setze für einen beliebigen Punkt $(\xi, \eta)$ im Quadrat $Q: -\pi \leqq \xi,\ \eta \leqq \pi$*

$$(9) \qquad F_\alpha^{**}(\xi, \eta) = \operatorname{Max}_h \frac{1}{4\alpha h^2} \int_{-\alpha h}^{\alpha h} dt \int_{-h+t}^{h+t} |F(\xi+u, \eta+t)|\, du,$$

*wo $h$ so klein ist, daß das Integrationsgebiet in $Q''$ liege. Ferner sei*

$$(10) \quad F^{**}(\xi, \eta) = \operatorname{Max}_h \{F_{2^s}^{**}(\xi, \eta)\, 2^{-|s|/2}\} \qquad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

*Dann ist*

$$(11) \qquad mE\{F^{**}(\xi, \eta) > \omega\} < \frac{c}{\omega} \iint_{(Q'')} |F(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

**3.** Für den Beweis unseres Satzes A ist es hinreichend zu zeigen, daß

$$\sigma^*(\xi, \eta; F) = \operatorname{Max}_n |\sigma_n(\xi, \eta; F)| \leqq c(F^*(\xi, \eta) + F^{**}(\xi, \eta)),$$

wo

$$\sigma_n(\xi, \eta; F) = \frac{s_{00} + s_{11} + \ldots + s_{n-1,n-1}}{n}.$$

Ist nämlich $F(\xi, \eta)$ eine periodische Funktion, dann folgt aus (8) und (11), daß

$$(12) \qquad mE\{\sigma^*(\xi, \eta; F) > \omega\} > \frac{c}{\omega} \iint_{(Q)} |F(\xi, \eta)|\, d\xi\, d\eta.$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $F = F_1 + F_2$, wo $F_1$ ein trigonometrisches Polynom ist und $F_2$ eine Funktion, für welche

$$(13) \qquad mE\{\sigma^*(\xi, \eta; F_2) > \varepsilon\} < \varepsilon$$

(eine solche Zerlegung von $F$ ist wegen (12) möglich). Da $\sigma_n(\xi, \eta; F_1)$ gleichmäßig gegen $F_1$ konvergiert und da $|\sigma_n(\xi, \eta; F_2)| < \varepsilon$ außer höchstens auf eine Menge vom Maße $< \varepsilon$, so folgt, daß $\sigma_n(\xi, \eta; F)$ fast überall gegen $F$ konvergiert.

**4.** Die explizite Form von $\sigma_n(\xi, \eta; F)$ ist die Folgende:

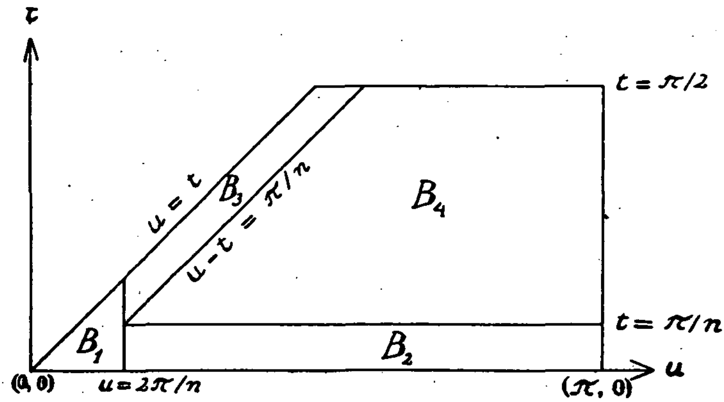
$$\sigma_n(\xi, \eta; F) =$$

$$(14) \quad \begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi^2 n} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u+\xi, t+\eta) \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k-1/2)u \sin(k-1/2)t}{\sin u/2 \sin t\ 2}\, du\, dt = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(u+\xi, t+\eta)\, k_n(u, t)\, du\, dt. \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung ergibt, daß

$$(15)\quad k_n(u,t)=\frac{1}{16n\sin{}^{u}/_{2}\sin{}^{t}/_{2}}\left(\frac{\sin n(u-t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u-t)}-\frac{\sin n(u+t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u+t)}\right).$$

Wir werden $k_n(u, t)$ in verschiedenen, in $Q$ liegenden Bereichen abschätzen. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf den Fall $0\leqq t\leqq u\leqq \pi$, $t\leqq {}^{\pi}/_{2}$. Wir zerlegen diesen Bereich $B$, wie es aus der Figur ersichtlich ist, in vier Teile.




*a)* In $B_1$ folgt aus dem Ausdruck von $k_n(u, t)$ in (14)

$$(16)\qquad |k_n(u,t)|\leqq\frac{1}{16n}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=cn^2.$$

*b)* In $B_2$ ist wegen $u-t\geqq{}^{\pi}/_{n}$ und $u-t\geqq{}^{u}/_{2}$

$$\frac{\sin n(u-t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u-t)}-\frac{\sin n(u+t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u+t)}=-2\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{\sin{}^{x}/_{2}}\right)_{x^*},\ u-t<x^*<u+t,$$

also

$$\left|\frac{\sin n(u-t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u-t)}-\frac{\sin n(u+t)}{\sin{}^{1}/_{2}(u+t)}\right|<ct\left(\frac{n}{u-t}+\frac{1}{(u-t)^2}\right)<c\left(\frac{2nt}{u}+\frac{4}{u^2}\right)$$

und nach (15)

$$(17)\qquad |k_n(u,t)|\leqq c\frac{1}{nut}\,n\frac{t}{u}=c\frac{1}{u^2}.$$

*c)* In $B_3$ ist

$$(18)\qquad |k_n(u,t)|\leqq c\frac{1}{n}\frac{1}{ut}\,n=c\frac{1}{ut}.$$

*d)* In $B_4$ ist

(19) $$|k_n(u,t)| \leqq c\frac{1}{n}\,\frac{1}{ut(u-t)}.$$

**5.** Es sei

(20) $$G_n(\xi,\eta)=\frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{(B)} F(\xi+u,\,\eta+t)\,k_n(u,t)\,du\,dt$$

und $p$ eine natürliche Zahl mit $2^p \leqq n < 2^{p+1}$. Dann ist nach den Abschätzungen des vorigen Paragraphen

$$|G_n(\xi,\eta)| \leqq c\left(2^{2p}\iint\limits_{(B_1)}|F(\xi+u,\eta+t)|\,du\,dt+\iint\limits_{(B_2)}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{u^2}\,du\,dt+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{(B_3)}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut}\,du\,dt+2^{-p}\iint\limits_{(B_4)}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut(u-t)}\,du\,dt\right)\leqq$$

(21) $$\leqq c\left(2^{2p}\int\limits_0^{\pi 2^{-p}}\int\limits_0^{\pi 2^{-p}}|F(\xi+u,\eta+t)|\,du\,dt+\int\limits_{\pi 2^{-p}}^{\pi}\int\limits_0^{\pi 2^{-p}}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{u^2}\,du\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\pi 2^{-p}}^{\pi}du\int\limits_{u-\pi 2^{-p}}^{u}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut}\,du\,dt+2^{-p}\int\limits_{\pi 2^{-p}}^{\pi}du\int\limits_{\pi 2^{-p-1}}^{u-\pi 2^{-p-1}}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut(u-t)}\,du\,dt\right)=$$

$$=c\,(A_p(\xi,\eta)+B_p(\xi,\eta)+C_p(\xi,\eta)+D_p(\xi,\eta)).$$

Es sei

(22) $$A^*(\xi,\eta)=\operatorname*{Max}_p A_p(\xi,\eta)\qquad p=1,2,\ldots$$

und $B^*(\xi,\eta)$, $C^*(\xi,\eta)$, $D^*(\xi,\eta)$ haben eine analoge Deutung. Wir bewiesen nun, daß

(23) $$mE\{A^*(\xi,\eta)>\omega\}<\frac{c}{\omega}\iint\limits_{(Q)}|F(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta$$

und die analogen Abschätzungen für $B^*(\xi,\eta)$, $C^*(\xi,\eta)$, $D^*(\xi,\eta)$. Nach (21) ergibt sich, wenn wir die Bezeichnungen von Lemma 2 anwenden,

(24) $$A_p(\xi,\eta)\leqq c\,2^{2p}\,2^{-2p}F_1^*(\xi,\eta)<cF^*(\xi,\eta),$$

$$B_p(\xi,\eta)=\sum_{i=0}^{p-1}\int\limits_0^{\pi 2^{-p}} dt\int\limits_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{u^2}du\leqq$$

$$(25)\qquad \begin{aligned}&\leqq c\sum_{i=0}^{p-1}2^{2i}\int\limits_{-\pi 2^{-p}}^{\pi 2^{-p}}dt\int\limits_{-\pi 2^{-i}}^{\pi 2^{-i}}|F(\xi+u,\eta+t)|\,du\leqq\\ &\leqq\sum_{i=1}^{p-1}2^{2i}2^{-(p+i)}F^*_{2^{i-p}}(\xi,\eta)\leqq c\sum_{i=0}^{p-1}2^{i-p+|i-p|/2}F^*(\xi,\eta)=\\ &=cF^*(\xi,\eta)\sum_{i=0}^{p-1}2^{-(p-i)/2}=cF^*(\xi,\eta).\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich nach (21), wenn wir die Bezeichnungen von Lemma 4 anwenden

$$C_p(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{p-2}\int\limits_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}}du\int\limits_{u-\pi 2^{-p}}^{u}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut}dt+$$
$$+\int\limits_{\pi 2^{-p}}^{\pi 2^{-p+1}}du\int\limits_{u-\pi 2^{-p}}^{u}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut}dt\leqq$$

$$(26)\qquad \begin{aligned}&\leqq c\sum_{i=0}^{p-2}\frac{2^i}{2^{-i-1}-2^{-p}}\int\limits_{-\pi 2^{-i}}^{\pi 2^{-i}}du\int\limits_{u-\pi 2^{-p}}^{u+\pi 2^{-p}}|F(\xi+u,\eta+t)|\,dt+\\ &\qquad+c\,2^{2p}\int\limits_{-\pi 2^{-p}}^{\pi 2^{-p}}du\int\limits_{u-\pi 2^{-p}}^{u+\pi 2^{-p}}|F(\xi+u,\eta+t)|\,dt\leqq\\ &\leqq c\sum_{i=0}^{p-1}\frac{2^i2^{-(i+p)}}{2^{-i-1}-2^{-p}}F^{**}_{2^{i-p}}(\xi,\eta)+c2^{2p}2^{-2p}F_1^{**}(\xi,\eta)\leqq\\ &\leqq c\sum_{i=0}^{p-1}\frac{2^{-p}2^{|i-p|/2}}{2^{-i-1}-2^{-p}}F^{**}(\xi,\eta)+cF^{**}(\xi,\eta)=cF^{**}(\xi,\eta),\end{aligned}$$

$$D_p(\xi,\eta)=2^{-p}\sum_{i=0}^{p-1}\int\limits_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}}du\left(\sum_{j=0}^{p-i-2}\int\limits_{u-\pi 2^{j-p}}^{u-\pi 2^{j-p-1}}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut(u-t)}dt\right)+$$
$$+2^{-p}\sum_{i=0}^{p-1}\int\limits_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}}du\int\limits_{\pi 2^{-p-1}}^{u-\pi 2^{-i-2}}\frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut(u-t)}dt=I_1+I_2;$$

$$I_1 \leqq c\,2^{-p} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}} du \left( \sum_{j=0}^{p-i-2} \frac{2^{p+i-j+1}}{2^{-i-1}-2^{j-p}} \int_{u-\pi 2^{j-p}}^{u-\pi 2^{j-p-1}} |F(\xi+u,\eta+t)|\,dt \right) \leqq$$

$$\leqq c \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{p-i-2} \frac{2^{-p}}{2^{-i-1}-2^{j-p}} F^{**}_{2^{j-p-i}}(\xi,\eta) \right) \leqq$$

$$\leqq c F^{**}(\xi,\eta) \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{p-i-2} \frac{2^{-p+|j-p+i|/2}}{2^{-i-1}-2^{j-p}} \right) \leqq$$

$$\leqq c F^{**}(\xi,\eta) \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{p-i-2} 2^{-(p-i)/2-j/2} \right) = c F^{**}(\xi,\eta),$$

$$I_2 \leqq c\,2^{-p} \sum_{i=0}^{p-1} \int_{\pi 2^{-i-1}}^{\pi 2^{-i}} du \left( \sum_{j=0}^{p-i} 2^{i} \int_{\pi 2^{-i-j+1}}^{\pi 2^{-i-j}} \frac{|F(\xi+u,\eta+t)|}{ut}\,dt \right) \leqq$$

$$\leqq c \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{p-i} 2^{i-p} F^{**}_{2^j}(\xi,\eta) \right) \leqq c F^{**}(\xi,\eta) \sum_{i=0}^{p-1} \left( \sum_{j=0}^{p-i} 2^{i-p+j/2} \right) \leqq$$

$$\leqq c F^{**}(\xi,\eta) \sum_{i=0}^{p-1} 2^{-(p-i)/2} = c F^{**}(\xi,\eta),$$

$$D_p(\xi,\eta) = I_1 + I_2 \leqq c F^{**}(\xi,\eta). \tag{27}$$

Die Ungleichungen (24), (25) mit Lemma 2 und die Ungleichungen (26), (27) mit Lemma 4 ergeben die Ungleichungen (23). Daraus folgt, daß

$$|G_n(\xi,\eta)| \leqq c(F^{**}(\xi,\eta) + F^{**}(\xi,\eta)).$$

Da $\sigma_n(\xi,\eta;F)$ die Summe von mit (21) analogen Integralen ist, ergibt sich die Ungleichung

$$|\sigma_n(\xi,\eta;F)| \leqq c(F^{*}(\xi,\eta) + F^{**}(\xi,\eta)),$$

womit unser Satz bewiesen ist.

*(Eingegangen am 10. Januar 1940.)*